数理解析研究所講究録
641巻 1988年 34-43

アルチン環の Dilworth 数

名大 理 渡辺純三 (Junzo Watanabe)

素イデアルが一つしかないネーター環をアルチン局所環という。以下、(A,p,k) がアルチン環と言った場合には、p を、唯一の素イデアルとする局所環で、剰余体 A/p = k なるものとする。アルチン環 A の Dilworth 数(d(A) と書く) は、

$$d(A) = \mathrm{Max}\{\ v(I)\ \mid A\ \text{のイデアル}\ I\ \}$$

と定義する。但し、v は、イデアルの極小生成系の元数である。Dilworth 数の起源は、poset(=partially ordered set) のイデアル論における Dilworth の定理である。([1],[2]。) アルチン環の Dilworth 数を考察するには、Dilworthの定理とそれに関連したいろいろの組合せ論的な手段が極めて有効である。(例えば、poset の Sperner 性、対称鎖分解、等。) このことについては、[4]で論じた。以下§1では、[4]で導入した定義を復習し、§2では、そこで得た Gorenstein 環についての一つの結果 (即ち、一般的な Gorenstein 環は、強 Stanley 性をもつ) を、その双対である標準加群の言葉に翻訳する。

§1では、強 Stanley 性、弱 Stanley 性、Sperner 性、等の定義を述べたが組合せ理論との関連については省略した。斉次 Artin Gorenstein 環 A は、Matlis duality により、その socle generator である、n 元 m 次形式 (ここに、n = A の埋蔵次元、m = A の maximal socle degree)で記述できる。このことは、あまり知られていない様なので、§2でかなり詳しく解説した。§3ではいくつかの例を挙げた。

§1 定義といくつかの基本定理

(A, p, k) をアルチン環とする。

$$d(A) = \mathrm{Max}\{\ v(I)\ \mid A \text{ のイデアル } I\ \}$$ を

A の Dilworth 数と呼ぶことは前にいった。更に

$$r(A) = \mathrm{Min}\{\ \mathrm{length}(A/zA)\ \mid\ z \in p\ \}$$

と定義し、A の Rees 数と呼ぶ。$r(A) = \mathrm{length}(A/zA)$ とする z を A の general element と呼ぶ。A が k を含む場合には、$r(A)$ は general element の Jordan 標準形のブロックの個数と言い換えることもできる。つぎの不等号は [4] で証明した。

定理1 $d(A) \leqq r(A)$.

アルチン環が次数付きであるとは、加群としての直和分解 $A = \oplus_{i=0}^{m} A_i$ が与えられていて、$A_i \times A_j \subset A_{i+j}$ となることである。$A_m \neq 0$ なるとき m を maximal socle degree と言う。次数付きアルチン環が斉次であるとは、A が A_0 上 A_1 で生成されることである。以下、次数付き環は A_0 が体であるものを考える。このときは、$\oplus_{i=1}^{m}$ か極大イデアル、A_0 が剰余体である。
$A = \oplus_{i=0}^{m} A_i$ を体 k 上の次数付きアルチン環とするとき、$h_i = \dim A_i$ と置き、$s(A) = \mathrm{Max}\{\ h_i\ \}$ を、A の Sperner 数とよぶ。数列 h_i を、A の Hilbert 数列という。この数列が、unimodalであるとは、$h_0 \leqq h_1 \leqq \ldots \leqq h_j \geqq h_{j+1} \geqq \ldots \geqq h_m$ ヨj 、なることである。h_i は、A_i が生成するイデアルの生

成系の元数だから、$s(A) \leqq d(A)$ が成り立つ。$s(A) = d(A)$ のとき、A は Sperner 性をもつという。$s(A) = r(A)$ のとき、A は、弱 Stanley 性をもつという。定理１より、弱 Stanley 性は、Sperner 性の十分条件である。

以下、$A = \oplus_{i=0}^{m} A_i$ を、無限体上の次数付きアルチン環とする。（この様に書いたとき、常に $A_m \neq 0$ と仮定する。）

定理２　(1)　A が弱 Stanley 性をもつための十分条件は、$\exists\ z \in A_1$; z による乗法 $z : A_i \to A_{i+1}$ が、k の上の行列として full rank をもつ。言い換えると、$z : A_i \to A_{i+1}$ が、単射かまたは全射かである。

(2)　A が斉次であれば、(1) の逆も成り立つ。

注意１　容易にわかる通り、A が斉次であれば、A の弱 Stanley 性から、Hilbert 数列の unimodality が従う。

注意２　弱 Stanley 性は、テンサー積では保たれない。このことは、次の例でわかる。

$R = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ を多項式環とし、$A = R/I$ とする。ここに、I は X_1^2 以外の２次の単項式すべてと、X_1^m とが生成するイデアルとする。このとき A が、弱 Stanley 性をもつことは容易にわかる。（定義にでてくる z として、$z = X_1$ とすればよい。）A の Hilbert数列は、1,n,1,1,1,....,1 である。ところが m が十分大きければ、$A \otimes A$ の Hilbert数列は、unimodal にはならない。従って注意１より、$A \otimes A$ は、弱 Stanley 性をもたない。これは同時に、Hilbert 数列の unimodality も、テンサー積によって保たれないことを示す例になる。

次数付きアルチン環 $A = \oplus_{i=0}^{m} A_i$ が、強 Stanley 性をもつとは、

$$\exists\ z \in A_1\ ;\quad z^{m-2i} : A_i \to A_{m-i} \text{ が全単射、} i=0,1,\ldots,[m/2]$$

と定義する。A の Hilbert 数列が対称的とは、 $h_i = h_{m-i}$ なることである。明らかに、強 Stanley 性 ⇒ 対称的 Hilbert 数列。また、強 Stanley 性 ⇒ 弱 Stanley 性 ⇒ unimodal Hilbert 数列。

定理３　標数０の体 $k = A_0$ 上の次数付きアルチン環 $A = \oplus_{i=0}^{m} A_i$ が、強 Stanley 性をもつための必要十分条件は、k 上で、リー環 sl_2 の表現

$$\rho : sl_2 \to \mathrm{End}(A)$$

が存在して、 $\rho \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \cdot z$、$z \in A_1$、各 A_i が weight m-2i の weight space となることである。

このことから直ちに次の定理が従う。

定理４　標数０の体上では、強 Stanley 性はテンサー積で保たれる。すなわち、A 、B を次数付きアルチン環とし、$y \in A_1$ 、$z \in B_1$ がそれぞれ強 Stanley 性の条件を満たせば、 $A \otimes B$ は、強 Stanley 性をもつ。(条件に言う１次式は $y \otimes 1 + 1 \otimes z$ である。)

§2 0次元 Gorenstein 環と斉次多項式

k を標数０の体とする。$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とし、$E = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を多項式環とする。 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ とし、

$R = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]/(\text{commutator})$ と置くと、R 自身 n 変数の多項式環で、E は自然に R-加群である。実は、E は R-入射加群である。このことは、次の様にしてわかる。先ず、R を単なる n 変数の多項式環とみる。R は、$X_i \to X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i$ で定義される comultiplication $R \to R \otimes R$ によって、coalgebra の構造をもつ。従って $E = {}_{gr}\text{-Hom}_k(R,k)$ は、R の comultiplication が誘導するmultiplication によって、自然に k-algebra と考えられる。ここに ${}_{gr}\text{-Hom}\ (R,k)$ は、同次部分ごとに Hom (,k)を取ったものとする。（$\deg X_i = 1,\ \forall i$ としておく。） この様にして定義された k-algebra E は、実は、 $E_1 = \text{Hom}(R_1, k)$ が k 上生成する divided power algebra である。
R_i の基底として i 次の単項式がとれる。 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の双対を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とし、 x_j の divided power を $x_j^{(q)}$ で表わせば、
$\{ x_1^{(i_1)} x_2^{(i_2)} \cdots x_n^{(i_n)} \}$ は $\{ X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n} \}$ の双対基底である。E をR-加群と見たとき、 X_j の作用は、 $x_j^{(q)}$ を $x_j^{(q-1)}$ に置きかえることである。標数０であれば、 $x_j^q = q!\, x_j^{(q)}$ と置いて初めの状況に戻る。すなわち標数０であれば、E は、 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とする多項式環であり、 X_i は、E に偏微分として作用する。$E = {}_{gr}\text{-Hom}(R,k)$ とみれば、[3] によりE は、次数付きR-加群のカテゴリーにおける k の入射包である。入射加群が algebra の構造をもつ必然性は無いが、多項式環の双対としての divided power algebra とみると都合の良いことが多い。
Matlis 理論により、k 上の斉次アルチン環 A は、その標準加群 K_A と、１対１

に対応しており、 K_A は E 内の有限生成部分 R-加群として特徴付けられる。
K_A = Hom(A,k)である。A = R/ann(K_A) として A が回復できる。 K_A の生成元の次数がすべて等しいとき A を level環という。(Stanley の定義による。)
K_A が１つの元で生成されるとき、A は Gorenstein 環である。（その逆も勿論正しい。) Matlis duality をアルチン Gorenstein 環に限って適用すると、次の１対１対応ができる。

embeddin dimension≦n,
max. socle degree=m の
斉次 Gorenstein 環　　　←———→　n 変数 m 次形式

A をこの様な Gorenstein 環とするとき、F(A)で A に対応する n 元 m 形式を表わす。逆に n 元 m 形式 F に対応する Gorenstein 環を A(F) で表わす。
F(A)は Hom(A,k)⊂E の生成元（唯一つ決まる）であり、 A(F)= R/ann(F) である。 F と F_1 が、GL(E_1) の元で移り合えば、その contragredient は、A(F) とA(F_1) の同型を引き起こす。逆も同様である。A(F) の embedding dimension が、e であれば、F は、本質的に e 変数の形式である。（すなわち、変数の１次変換で e 変数の形式に直せる。逆に言うと、１次変換で F の変数を減らすことができなければ、A(F) の埋蔵次元は丁度 n である。） D∈R , F∈R をそれぞれ斉次とすれば、A(F)/0:D = A(DF) が成り立つ。(Matlis duality による。)
Gorenstein環 A(F) が強 Stanley 性を持つとき F を強 Stanley 形式と言うことにする。RF を F が生成する E の部分 R-加群とすると、RF = (R/annF)* と考えられるから、 End(A(F)) = End(RF)* である。したがって、強 Stanley 形式の定義は次のように述べられる。

定義 F ∈ E を m 次形式とする。F が強 Stanley 形式であるとは、次の同値な条件 (1) と (2) の成り立つことである。

(1)　∃ $z \in R_1$;　z^{m-2i} : R_i F → R_{m-i} F が、各 i=0,1,...,[m/2] について全単射。

(2)　リー環 sl_2 の表現　$\rho :\ sl_2 \to End(RF)$ が存在して、
$\rho \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \cdot z\ (\exists z \in R_1)$ 、各 $R_{m-i}F$ が weight m-2iの weitht space となる。
（注意。この定義でいう z が一つでも存在すれば、 R_1 の一般元はすべてこの性質をもつ。）

同様に、「弱 Stanley 形式」もアルチン環の場合の双対として定義する。 $h_i = \dim R_{m-i}F$ と置くと h_i は A(F) の Hilbert 数列だから対称的である。これを、Gorenstein vector とよぶ。

定理５　$F = x_1^{e_1}x_2^{e_2}\ldots.x_n^{e_n}$ は強 Stanley 形式である。

証明は、n = 1 の場合は明か。n ＞ 1 の場合は、リー環のテンサー表現に帰着する。（前節定理４。）一般的に言って２つの形式 F_1, F_2 が共通の変数を持たなければ、$A(F_1F_2) = A(F_1) \otimes A(F_2)$ である。従って、２つの強 Stanley 形式 F_1, F_2 を異なる変数で書いておけば、その積は、強 Stanley 形式である。

定理６　R_d で R の d 次斉次部分を表わす。m 次の強 Stanley 形式 F に対して、各 $d \leqq m$ につき non-empty Zariski open set $U \subset R_d$ が存在して、$D \in U \Rightarrow DF$ は強 Stanley 形式となる。

証明　[4] Theorem 8。

$F_d = (x_1\ x_2 \ldots..x_n)^d$ と置く（変数の積の d 乗）。明らかに $E = \bigcup_d RF_d$ と書けるから、定理５と定理６によって、「ほとんど全て」の斉次多項式は強 Stanley 形式である。よって、強 Stanley 形式よりも、そうでないものを見つけることの方が、余程難しい問題である。次節では、この問題を考える。

§3 Level 環の標準加群のイデアル化と Hesse 形式

目標は強 Stanley ではない形式を見付けることである。形式 F は1変換で変数の数を減らせなものと仮定する。このとき、F の次数≦4であれば、F が強 Stanley 形式 ⇔ F の Hessian≠0 である。これはつぎの定理からわかる。

定理7 k を標数0の体とする。前節同様 x_1 , x_2 ,....., x_n を変数とし、$E = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を多項式環とする。$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ とし、$R = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]/(\text{commutator})$ とおく。更に、ξ_1 ,...., ξ_n を新しい変数として、$z = \xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n$ と置く。$F \in E$ を次数 m の形式とし、$V_i = R_i F$ と置く（R_i は、i 次の斉次部分）。このとき、

(a) $z^m(F) = m!F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

(b) $z^{m-2}: V_1 \longrightarrow V_{m-1}$ は、行列 $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ に ξ_1 ,...., ξ_n を代入したものである。（この行列式が F の Hessian。）

証明は直接計算して確かめられる。

R を可換環とし、M を R-加群とする。加群としての直和 $R \oplus M$ に

$$(r,m).(s,n) = (r.s,\ rn+sm)$$

によって積を定義したものが、M のイデアル化である。（永田のトリック、またイデアル化原理として知られている。）一般に、M が R の標準加群であれば、M のイデアル化は Gorenstein 環である。A が level 環であれば、$A \oplus K_A$ は斉次の Gorenstein 環である。

A をアルチン level 環とし、その標準加群 K_A の極小生成元を F_1 , F_2 , ..., F_t とすれば、アルチン Gorenstein 環 $B := A \oplus K_A$ 対応する形式 $F(B)$ は、次の様になる。level環の定義によって、 F_1 , F_2 , ..., F_t は同次数である。t 個の新変数 u_1 , u_2 , ..., u_t を導入して、$F = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \dots + u_t F_t$ と置くと $F(B) = F$ である。

以上のことを利用して、強 Stanley ではない形式を求めることができる。第１節で述た通り、F が強 Stanley ならその Gorenstein vector は unimodal になる。従って、non-unimodal Hilbert 数列を持つ Gorenstein 環 A があれば、F(A) は、強 Stanley ではありえない。この様な Gorenstein 環 A は Stanley によって、 $A' = k[X,Y,Z]/(X,Y,Z)^4$ 上の標準加群のイデアル化として得られた。この Gorenstein vector は 1,13,12,13,1 である。A' の socle generatorは、３次の単項式全て（10個ある）だから、F(A) は、13変数 4次式として求められる。

この仕方で、non-unimodal Hilbert数列を持つ Gorenstein 環が大量に構成できる。更に、 unimodal Hilbert 数列を持つもので強 Stanley ではないものや、弱 Stanley だが強 Stanley ではないものが構成できる。以下、例のみ挙げる。（例３を確かめるには少し工夫がいる。これ以外は直接計算して確かめられる。）

例１ Unimodal Hilbert 数列をもつが、強 Stanley ではないもの。

$$F = ux^2 + vxy + wy^2 .$$

$A(F)$ は、$k[X,Y]/(X,Y)^3$ の標準加群のイデアル化としてえられた。
Hilbert 数列は、1､5､5､1 である。これは、弱 Stanley でもない。
$s(A) = 5,\ d(A) = r(A) = 6.$

例2 弱 Stanley だが 強 Stanley ではないもの。

$F = ux^3 + vx^2 y + wy^3$ 。 Hilbert 数列は、1、5、6、5、1 である。

$A = A(F)$ と置くと、$s(A) = d(A) = r(A)$.

例3 Sperner 性をもつが、弱 Stanley にはならないもの。

$F = ux^2 y^2 + vy^2 z^2 + wz^2 x^2$ 。 Hilbert 数列は、1、6、12、12、6、1 。

$A = A(F)$ と置くと、$s(A) = 12$, $d(A) = 12$, $r(A) = 13$ となる。

参考文献

[1] 岩掘長慶、線型不等式とその応用、岩波講座基礎数学

[2] M.Aigner,Combinatorial Theory, Springer

[3] S.Goto-K.Watanabe, On graded rings I, Math.Soc.Japan, 30, no.2, 1978

[4] J.Watanabe, The Dilworth number of Artinian rings and finite posets with rank function,Proceedings of conference on commutative algebra and combinatorics, Kyoto 1985, Kinokuniya Co. and North-Holland Publ. Co.